

6つの主曲率を持つ S^{13} の等径超曲面

宮岡礼子

Abstract

これは、 S^{13} の6つの主曲率を持つ等径超曲面の分類に関する最終的な考察である。著者の分類証明の「反例」を与えたと主張する論文が発表されているが、その主張は正しくないことを明確にする。つまり、分類（等質性の証明）は完全である。¹

概要

著者が [2] で与えた6つの主曲率を持つ S^{13} の等径超曲面 M の分類（等質性の証明）の柱は

「 M の焦部分多様体の型作用素（等スペクトル）の核が法方向によらず一定ならば M は等質超曲面である」

という事実（§15 [1]）に基づく。したがって、証明の本質は、

多数の等スペクトル族の中から焦部分多様体の型作用素を特定することである。そのために、核の動きを丁寧に計算したのが [2] の議論の本質である。[3] の付録の誤りを指摘する。

- [2] の議論 M の焦部分多様体の型作用素 –等スペクトルをもつ2係数族– は、[2] の命題.6.2 に述べられている性質 [P] と書く) を持つ。
- [3] の議論 性質 [P] を満たさない等スペクトル作用素 $L(t, s)$ が存在する。 $L(t, s)$ は命題.6.2 の反例である。
- 正しい結論 $L(t, s)$ は [P] を満たさないので、焦部分多様体の型作用素となり得ない。命題.6.2 の反例ではない。

[2] では、焦部分多様体の型作用素の持つ性質を核の動きを丁寧に分析してその性質 [P] を与えている。[3] の付録における議論は、線形代数のみを用いていて、幾何の議論が欠けている。等スペクトル作用素は線形代数的には多数構成できる。それが焦部分多様体の型作用素となり得るかどうかを調べることが肝心である。

[2] の §§3–6 で展開された議論をよく理解している読者であれば、著者の証明が正しく、[3] で提示された例と矛盾しないことを容易に理解できるが、より広範な読者にとって、根底にある推論は複雑であり、また場合によっては繊細であるため、ここで詳細に再現することは困難である。そこで著者はいくつかの重要な点を強調しておく。

¹2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 53C40. Secondary: 53C42, 53A07.

Keywords: Isoparametric hypersurfaces

Partly supported by Grants-in-Aid for Scientific Research C 24K06701 of JSPS.

- 純粋に線型代数的な観点から見ると、様々な核を持つ 2 係数等スペクトル作用素の族は多数存在し、その中に $L(t, s)$ も含まれる。しかし、幾何学から生じる型作用素は、はるかに制約された性質をもつ。
- 著者は、[2] の §3–6 において、焦部分多様体に固有の 2 係数等スペクトル型作用素が動く際に、核ベクトルがどのように振る舞うかを詳細に検討した。この振る舞いは抽象的な代数的議論ではなく、 $\nabla_{e_6} e_3, \nabla_{e_3} e_6$ という特定の幾何学量とその高次微分によって制御される。ここで、 e_3 は核ベクトルを表し、 e_6 は型作用素のパラメータに対応する。この議論により最終的に、焦部分多様体の作用素の核が係数によらないことを導出した。
- 対照的に、[3] の付録には、これに匹敵する幾何学的解析は含まれていない。その議論は完全に線型代数の領域で進められており、さらに、そこで構築された作用素の解釈は、焦部分多様体上の型作用素という幾何学的設定を正しく反映していない。したがって、[3] の作用素は、[2] で確立された議論の反例としては機能しない。

最後にもう一度要点をまとめる。

要点

1. 型作用素の特定は等スペクトル性だけでは十分ではない。
2. 各型作用素の核は真の幾何学的情報を持つ。
3. [2] の §3–6 で展開された議論は不可欠であり、線型代数的考察だけでは再現できない。

謝辞

著者は、[3] の「反例」について注意を喚起してくれた方々に心から感謝の意を表す。一部の読者から [2] の結果の正しさについて疑問が提起されるまで、著者が十分な対応をしておこなったことが問題であった。

References

- [1] R. Miyaoka, *Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$* , Ann. Math. 177, 53–110 (2013).
- [2] R. Miyaoka, *Errata of “Isoparametric hypersurfaces with $(g, m) = (6, 2)$ ”*, Ann. Math. 183, 1057–1071 (2016).
- [3] A. Siffert, *A new structural approach to isoparametric hypersurfaces in spheres*, Ann. Glob. Anal. Geom. 52, 425–456 (2017).

東北大学大学院理学研究科数学専攻
980-8578/ 仙台市青葉区
E-mail Address: r-miyaok@tohoku.ac.jp